Stochastik 2: Kombinatorik

1 Geben Sie jeweils an, auf wie viele verschiedene Arten sich die Buchstaben anordnen lassen, sodass jeweils eine andere Zeichenkette entsteht. Begründen Sie Ihre Angabe.

(a) XY (b) ABCDE (c) STT (d) AABB (e) AABC (f) UUUUU

2 (Ohne TR!) Berechnen Sie die folgenden Fakultäten: $4!$, $7!$, $8!$

3 (Ohne TR!) Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten: $\binom{2}{1}$, $\binom{6}{2}$, $\binom{20}{1}$, $\binom{33}{0}$ und $\binom{44}{43}$.

4 Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

(b) $\binom{n}{1} = n$

(c) $\binom{n}{n-1} = n$

(d) $\binom{n}{n} = 1$

(e) $\binom{n}{0} = 1$

(f) $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

5 Erläutern Sie die Schritte der folgenden Rechnung:

(1) $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$, $k \geq 1$

(2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}$

(3) $= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n! \cdot k}{k!(n+1-k)!}$

(4) $= \frac{n! \cdot (n+1-k)}{k!(n+1-k)!} + \frac{n! \cdot k}{k!(n+1-k)!}$

(5) $= \frac{n! \cdot (n+1-k) + n! \cdot k}{k!(n+1-k)!}$

(6) $= \frac{n! \cdot (n+1)}{k!(n+1-k)!}$

(7) $= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$

6 Beweisen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq k$. Können Sie diese Formel auch anschaulich begründen?

7 Aus einem Lostopf mit 2 Hauptgewinnen, 5 Trostpreisen und 8 Nieten werden 4 Lose zufällig gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) $A =$ »Es werden 2 Trostpreise und 2 Nieten gezogen«

(b) $B =$ »Es werden nur Nieten gezogen«

(c) $C =$ »Es wird (mindestens) ein Hauptgewinn gezogen«

(d) $D =$ »Es wird (mindestens) eine Niete gezogen«

8 Bei einem Wettrennen starten 20 Läufer. Die drei schnellsten Läufer erhalten eine Gold-, Silber- bzw. Bronze-Medaille und sie werden am Ende des Wettkampfs für die Zeitung fotografiert. Bei dem Foto ist nicht erkennbar, wer welchen Platz belegt hat.

(a) Berechnen Sie, wie viele Möglichkeiten es für die Verteilung der Medaillen gibt.
(b) Die Fotografin kann nicht bis zum Ende des Wettkampfs bleiben und erwägt daher, alle möglichen Kombinationen der drei Gewinner *vor* dem Wettkampf zu fotografieren. Dann kann sie im Nachhinein das richtige Foto auswählen.
Beurteilen Sie die Idee der Fotografin.

9 Bei einem Spiel werden 5 normale sechseitige Würfel geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

- $A =$ »Die Augensumme ist 5«
- $B =$ »Die Augensumme ist 20«
- $C =$ »Die Augensumme beträgt mindestens 7«

10 Fünf Freundinnen machen Selfies. Auf jedem Selfie sind genau drei der Freundinnen zu sehen.

(a) Berechnen Sie, wie viele Fotos die Freundinnen machen müssen, damit alle möglichen 3er-Kombinationen abgedeckt sind.
(b) Untersuchen Sie, wie viele Fotos sie zusätzlich machen müssen, wenn die sechste Freundin hinzukommt. Erklären Sie den Zusammenhang zur Formel $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

11 Berechnen Sie, wie viele ...

(a) ...fünfstellige Zahlen man aus den Ziffern 4, 7 und 9 bilden kann.
(b) ...fünfstellige Zahlen man aus den Ziffern 0-9 bilden kann, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf.
(c) ...fünfstellige Zahlen man aus den Ziffern 0-9 bilden kann, wenn keine Ziffer doppelt vorkommen darf und die Ziffern aufsteigend sortiert sein sollen (z.B. ist 13679 erlaubt, nicht aber 93167).

12 Beim Lotto »6 aus 49« kreuzt man zunächst auf einem Lottoschein sechs Zahlen zwischen 1 und 49 an. Nach der Ziehung wird dann verglichen, wie viele Zahlen richtig getippt wurden.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für »6 Richtige«.
(b) In Deutschland wird zusätzlich noch eine »Zusatzzahl« zwischen 0 und 9 zufällig ermittelt. Erst bei sechs Richtigen mit korrekter Superzahl wird der Jackpot geknackt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, den Jackpot zu knacken.

13 Ein »normales« Kartenspiel enthält 32 Karten (mit den Symbolen 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass in den Farben Karo, Herz, Pik und Kreuz). Bei einem Kartenspiel erhält jeder Spieler zu Beginn 7 Karten.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) A : Andi erhält 3 Könige
(b) B : Beate erhält 2 Buben, 3 Zahl-Karten und 1 Ass

(c) C : Christian erhält kein Ass

(d) D : Doro erhält jedes Symbol ein Mal

14 Für alle natürlichen Zahlen n gilt die Formel

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(a) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Formel für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$.

(b) Erläutern Sie die Schritte des nachfolgenden Beweises:

(1) Induktionsanfang: siehe Teil (a)

(2) Induktionsschritt: $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

(3) $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n^2 + 2n + 1$

(4) $= \frac{n(n+1)(2n+1)+6n^2+12n+6}{6}$

(5) $= \frac{2n^3+3n^2+n+6n^2+12n+6}{6}$

(6) $= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$

(7) Andererseits: $(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = (n^2+3n+2)(2n+3)$

(8) $= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$

15 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit Hilfe vollständiger Induktion:

(a) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) $3^n \geq 2n + 1$

(c) Ein ebenes n-Eck hat eine Winkelsumme von $(n-2) \cdot 180°$

16 Die drei Schwestern Emmy, Ada und Sophie finden bei einer Schatzsuche 4 Münzen, die sie untereinander zufällig aufteilen, wobei jede Aufteilungsmöglichkeit gleich wahrscheinlich sein soll. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

- $A =$ »Ada erhält alle 4 Münzen«
- $B =$ »Jede der drei Schwestern erhält mindestens 1 Münze«
- $C =$ »Emmy erhält gar keine Münze«

17 Eine Schulklasse bestehe aus n Schüler*innen. Es sei A das Ereignis, dass mindestens 2 der n Schüler*innen am selben Tag Geburtstag haben. Wir gehen davon aus, dass ein Jahr genau 365 Tage hat und jeder Tag mit gleicher Wahrscheinlichkeit Geburtstag eines Schülers sein kann.

(a) Sei $n = 20$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{P}[A] \approx 41\,\%$.
Hinweis: Bestimmen Sie die Gegenwahrscheinlichkeit.

(b) Untersuchen Sie, ab welcher Zahl n die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Schüler*innen am selben Tag Geburtstag haben, über $50\,\%$ liegt.

18 Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Möglichkeiten, die Buchstaben des Wortes anzuordnen, sodass ein neues Wort entsteht.

(a) OTTO (b) ANANAS (c) MISSISSIPPI

19 In der Kombinatorik wird gerne von den sogenannten »Urnenmodellen« gesprochen:
Eine Urne enthalte n Kugeln, die alle unterscheidbar sind (z. B. durchnummeriert). Nun werden daraus k Kugeln gezogen.
Geben Sie eine Formel für die Anzahl der möglichen Ergebnisse an, wenn ...

(a) ... nach jedem Zug die gezogene Kugel zurückgelegt wird und die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, eine Rolle spielt. (Mit Zurücklegen, mit Reihenfolge)

(b) ... die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, eine Rolle spielt. (Ohne Zurücklegen, mit Reihenfolge)

(c) ... die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden und die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, keine Rolle spielt. (Ohne Zurücklegen, ohne Reihenfolge)

Dabei bedeutet »die Reihenfolge spielt eine Rolle«, dass es unterschiedliche Ergebnisse sind, wenn zuerst die Kugel Nr. 8 und danach die Kugel Nr. 5 gezogen wird.

20* Der Mathe-LK aus 12 Schüler*innen möchte zu Weihnachten wichteln: Jeder Schüler soll einem zufälligen anderen Schüler ein kleines Geschenk machen. Jeder Schüler schreibt einen Zettel mit seinem Namen, die Zettel werden durchmischt und jeder Schüler zieht einen dieser Zettel. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, dass mindestens ein Schüler seinen eigenen Zettel zieht.
Es sei $A_i =$ »Schüler Nr. i zieht seinen eigenen Zettel« für $i = 1, 2, 3, \dots, 12$.

(a) Geben Sie $\mathrm{P}[A_i]$ an.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{P}\left[A_i \cap A_j\right]$ für $i < j$ und $\mathrm{P}\left[A_i \cap A_j \cap A_k\right]$ für $i < j < k$

(c) Begründen Sie die Gültigkeit der Formel

$$\mathrm{P}[A \cup B \cup C] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] + \mathrm{P}[C] - (\mathrm{P}[A \cap B] + \mathrm{P}[A \cap C] + \mathrm{P}[B \cap C]) + \mathrm{P}[A \cap B \cap C]$$

anhand eines geeigneten Bildes.

(d) Begründen Sie die Gültigkeit der Formel

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{12}] = {} & \mathrm{P}[A_1] + \mathrm{P}[A_2] + \dots + \mathrm{P}[A_12] \\ & - (\mathrm{P}[A_1 \cap A_2] + \mathrm{P}[A_1 \cap A_3] + \dots + \mathrm{P}[A_{11} \cap A_{12}]) \\ & + (\mathrm{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] + \dots + \mathrm{P}[A_{10} \cap A_{11} \cap A_{12}]) \\ & - \dots \\ & - \mathrm{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{12}]\end{aligned}$$

(e) Berechnen Sie $\mathrm{P}[A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{12}]$ mit Hilfe der Formel aus (d).
Zur Kontrolle: $\approx 1 - \frac{1}{e}$