Stochastik 1: Grundlagen

1 Beurteilen Sie, ob das beschriebene Experiment ein Zufallsexperiment ist und geben Sie gegebenenfalls die Ergebnismenge Ω an.

(a) Sie werfen eine Münze drei mal und zählen, wie oft die Münze Kopf zeigt.

(b) Sie notieren die Farbe des ersten Autos, das sie morgens sehen, wenn sie aus dem Haus gehen.

(c) Sie werfen drei Würfel und bilden die Augensumme.

(d) Sie befragen 5 Ihrer Mitschüler*innen danach, ob sie nach dem Abitur studieren wollen.

2 Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten (jeweils 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König , As in Karo, Herz, Pik und Kreuz; Karo und Herz sind rot, Pik und Kreuz sind schwarz) wird zufällig eine Karte gezogen.

(a) Begründen Sie, dass es sich um ein Zufallsexperiment handelt und geben Sie die Ergebnismenge Ω an.

(b) Stellen Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von Ω dar.

- $A =$ »Die Karte ist ein König«
- $B =$ »Es ist eine Pik-Karte.«
- $C =$ »Die Karte das Herz-As«
- $D =$ »Die Karte ist eine schwarze Bild-Karte«

(c) Ermitteln Sie die Elemente der zusammengesetzten Ereignisse.

(1) $A \cap B$ (2) $\overline{B} \cap D$ (3) $A \cup C$

(d) Es seien $E =$ »Es ist eine Kreuz-Karte«, $F =$ »Es ist eine Dame« und $G =$ »Es ist ein Bube«. Stellen Sie das Ereignis D als Schnitt bzw. Vereinigung der Ereignisse A, B, E und G dar.

3 Begründen Sie die Gültigkeit der Formel

$$\mathrm{P}[A \cup B] = \mathrm{P}[A] + \mathrm{P}[B] - \mathrm{P}[A \cap B]$$

4 Begründen Sie, dass es sich bei ihrer Ergebnismenge Ω aus Aufgabe 2 um ein Laplace-Experiment handelt.
Bestimmen Sie die die Wahrscheinlichkeiten aller in Aufgabe 2 (b) und (c) aufgeführter Ereignisse (auch die der zusammengesetzten Ereignisse).

5 Zwei vierseitige Würfel (Zahlen 1 bis 4) werden geworfen und die Augensumme gebildet.

(a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge an, mit der das Experiment zum Laplace-Experiment wird.

(b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.

(1) $A =$ »Die Augensumme ist 3«

(2) $B =$ »Die Augensumme ist kleiner als 4«

(3) $C =$ »Die Augensumme ist mindestens 4«

(4) $D =$ »Die Würfel zeigen einen Pasch (zwei gleiche Zahlen)«

(5) $B \cap D$

(6) $A \cup C$

(7) $\overline{A}$

(8) $A \cap D$

6 Werfen Sie einen normalen Spielwürfel 10 mal und notieren Sie die Zahlen.

(a) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert sowie die empirische Standardabweichung Ihrer Zahlen.

(b) Wiederholen Sie das Experiment weitere 10 mal und berechnen Sie abermals den Mittelwert und die Standardabweichung aller 20 Zahlen.

(c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus (a) und (b). Begründen Sie Ihre Beobachtungen.

7 Beweisen Sie: Wenn die empirische Standardabweichung 0 ist, dann sind alle betrachteten Zahlen gleich.

8 Es soll experimentell näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, mit 4 normalen Würfeln eine Augensumme von 13 zu erzielen.
Planen Sie ein Experiment, führen Sie es durch und ermitteln Sie einen Nährungswert für die Wahrscheinlichkeit.

9 Bei der Übertragung von Daten kommt es immer wieder zu Fehlern. Um eine Verbindung zu überprüfen, wird 8 mal jeweils 1 MBit (Mega-Bit) versendet. Dies ist die Anzahl der fehlerhaften Bits in den 8 Durchgängen: $2, 0, 3, 12, 1, 3, 0, 4$.

(a) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert sowie die empirische Standardabweichung der Anzahl fehlerhafter Bits.

(b) Am nächsten Tag wird dieselbe Verbindung noch einmal geprüft und dabei sind 11 Bits fehlerhaft. Der Techniker schließt daraus, dass wahrscheinlich eine Störung vorliegt. Beurteilen Sie diese Folgerung unter der Annahme, dass Mittelwert und Standardabweichung aus Teil (a) typisch für eine nicht-gestörte Verbindung sind.

10 Ein Würfel mit dem Netz aus Material 1 wird einmal geworfen.
Gegeben sind die Ereignisse

- $A =$ »Ergebnis ist gerade«
- $B =$ »Ergebnis ist größer als 2«

(a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse A und B an.

(b) Begründen Sie, dass $\Omega = \{1; 2; 3; 4\}$ keine geeignete Laplace-Ergebnismenge ist.

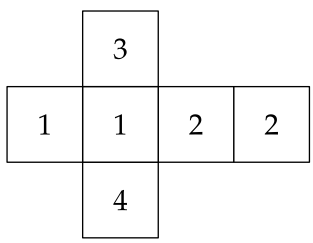
(c) Formulieren Sie eine mögliche Laplace-Ergebnismenge für das Experiment.

(d) Prüfen Sie, ob Sie mit Hilfe Ihrer Modellierung aus (c) die korrekten Wahrscheinlichkeiten für A und B erhalten.

11 Es wird ein Experiment mit drei Karten durchgeführt: Eine ist auf beiden Seiten rot, eine auf beiden Seiten blau und eine auf der einen Seite rot und auf der anderen Seite blau. Die Karten werden blind gemischt sowie auf zufällige Seiten gedreht. Dann werden sie auf auf einen Stapel gelegt. Die oberste Karte zeigt eine rote Seite.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Rückseite der obersten Karte auch rot ist.

12 Bei einem Experiment wird mehrfach ein normaler Würfel geworfen. Beurteilen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Wenn unter 10 Würfen keine Sechs fällt, ist der Würfel gezinkt.
(b) Wenn nach 10 Würfen keine Sechs gefallen ist, steigt die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Sechs zu werfen.
(c) Wenn man 600 mal würfelt, kann man davon ausgehen, etwa 100 Sechsen zu werfen.
(d) Wenn man 6 mal würfelt, kann man damit rechnen, 1 Sechs zu werfen.



Material 1